

METODA REDUCERII LA ABSURD

ABSTRACT. Articolul de față prezintă metoda reducerii la absurd ca metodă de rezolvare a unor probleme cu câteva exemple.

Lecția se adresează claselor a IV-a și a V-a

Data: februarie 2010

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București

Să lămurim mai întâi ce înseamnă absurd. Dacă ne uităm într-un dicționar vom citi: *absúrd, -ă: care contrazice gândirea logică, legile naturii, bunul-simț.*

Pe această definiție se bazează și raționamentul "prin reducere la absurd".

Orice problemă de matematică are două părți. Exisă niște fapte date și care nu pot fi contestate ele fiind sigur adevărate (ex. un caiet costă 2 lei) și alte fapte (cele care se cer) despre care nu avem siguranța că sunt adevărate (ex. pentru 5 caiete s-a plătit 15 lei).

Faptele care se dau formează ipoteza problemei, iar faptele care se cer formează concluzia.

Rezolvarea unei probleme prin metoda reducerii la absurd pornește tocmai de la faptul că ne putem îndoi de concluzie. Din moment ce nu suntem siguri că cerința problemei este adevărată putem presupune că ea este falsă. Construim astfel o nouă afirmație care se adaugă la ipoteza problemei.

Acum, pe baza unui raționament, vom ajunge la o afirmație care este absurdă (este în contradicție cu ceva deja acceptat că este adevărat).

Să luăm un mic exemplu prin care se arată cum trebuie să gândim atunci când aplicăm "metoda reducerii la absurd".

Problema 1: Suma a șase numere naturale nenule este 20. Arătați că cel puțin două dintre numere sunt egale.

Soluție: Ipoteza (ceea ce este sigur adevărat)

1. Am șase numere naturale diferite de 0;
2. Suma celor șase numere este 20.

Concluzia (ceea ce se cere și despre care nu suntem siguri că este adevărat)

Printre cele șase numere sunt unele care sunt egale; două sau mai multe.

Demonstrația (cum justificăm)

Vom folosi metoda reducerii la absurd. Pentru aceasta vom spune: Nu este adevărat că "*Printre cele șase numere sunt unele care sunt egale*".

Atunci este adevărat că "*toate cele șase numere sunt diferite unul de celălalt*".

Dacă luăm și adunăm cele mai mici șase numere naturale nenule obținem

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Dar problema spunea că *Suma celor șase numere este 20*, iar noi am obținut suma 21.

Rezultatul obținut de noi este în contradicție cu ceea ce se știa din problemă. Dacă la adunare nu am greșit, atunci unde este greșala? Greșala am făcut-o atunci când nu am fost de acord cu concluzia propusă de problemă și anume că "*Printre cele șase numere sunt unele care sunt egale*".

Așadar concluzia problemei este corectă; cel puțin două dintre numere sunt egale.

Să rezolvăm acum și alte probleme, dar fără a mai "despica firul în patru".

Problema 2: Ana și Barbu joacă un joc cu trei cărți, doi jokeri și o carte de alt fel (să zicem un as). Fiecare ia o carte și fără a se uita la ea o pune pe frunte. Cartea rămasă nu se întoarce. Fiecare trebuie să ghicească ce carte are pe frunte.

Barbu spune: Nu știu ce carte am pe frunte.

Atunci Ana spune: eu am un joker.

Justificați cum a aflat Ana ce carte avea pe frunte.

Soluție: Ana s-a folosit de metoda reducerii la absurd.

A gândit așa:

Să presupunem că pe fruntea mea s-ar afla asul. Atunci Barbu, văzând la mine pe frunte asul și știind că există numai unul ar fi răspuns: "*pe fruntea mea se află un joker*". Cum Barbu nu a putut răspunde înseamnă că pe fruntea mea nu se află asul ci un joker. Și astfel a putut da răspunsul Ana.

Problema 3: Suma a două numere naturale nenule, a și b este 169. Arătați că unul dintre numere este mai mare sau egal cu 85.

Soluție: Rezolvăm problema prin metoda reducerii la absurd.

Să presupunem că niciunul dintre numere nu este mai mare sau egal cu 85. Atunci

$$a \leq 84$$

și

$$b \leq 84$$

Adunând cele două inegalități obținem

$$a + b \leq 168$$

Dar $a + b = 169$ ceea ce înseamnă că $169 \leq 168$. Cum acest lucru este absurd înseamnă că presupunerea făcută de noi și anume că niciunul dintre numere nu este mai mare sau egal cu 85 este greșită. Așadar, unul dintre numere este mai mare sau egal cu 85.

Problema 4: Într-o urnă sunt bile de două culori: albastre și roșii. Oricum am scoate 6 bile între ele sunt și bile albastre și bile roșii. Arătați că numărul total de bile este mai mic sau egal cu 10.

Soluție: Să presupunem că sunt mai mult de 10 bile. Atunci avem cel puțin 11 bile. Fiind bile numai de două culori, atunci vor fi cel puțin 6 bile de aceeași culoare (11 sau mai mult nu se poate obține ca sumă de două numere naturale decât dacă unul dintre numere este cel puțin 6). În această situație vom putea scoate din urnă 6 bile de o singură culoare. Dar acest lucru contrazice ceea ce se spune în problemă (oricum am scoate 6 bile între ele sunt și bile albastre și bile roșii). Așadar, presupunerea făcută de noi că în urnă sunt mai mult de 10 bile este falsă, deci numărul bilelor din urnă este mai mic sau egal cu 10.